

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.
- Observații privind SUBIECTUL I:
 - În cazul în care la o întrebare pe foaia de examen sunt mai multe răspunsuri (exemplu: "A.", "B."), niciunul dintre ele nu se punctează.
 - În cazul în care la o întrebare răspunsul nu este clar (exemplu: se scrie un caracter similar și cu "B." și cu "D."), răspunsul nu se punctează.
 - În cazul în care la o întrebare răspunsul final nu este corect dar există justificări parțial corecte, punctajul se calculează conform baremului afișat.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Răspuns corect: D. Folosind că $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, putem deduce că $i^{2024} = (i^4)^{506} = 1$, respectiv $i^{2025} = i \cdot i^{2024} = i$. Așadar avem $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2024} + i^{2025} = 1 + i - i - 1 + \dots + 1 + i = 1 + i$.	5p 3p 1p
2.	Răspuns corect: C. Cum g este inversa funcției f, are loc $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci pentru $x = 0$ avem $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = 0$, adică $g(0)$ este soluție a ecuației $f(x) = 0$. Se poate observa că unica soluție este $x = 1$ (în timp ce celelalte două rădăcini ale polinomului f nu sunt reale).	5p 1p 3p
3.	Răspuns corect: A. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci din $3 - z = z ^2 - i$ obținem $3 - a - a^2 - b^2 + i(1 - b) = 0$ Așadar, vom obține următoarele relații: $3 - a - a^2 - b^2 = 0$ și $1 - b = 0$. De unde avem că $b = 1$, în timp ce a verifică ecuația $a^2 + a - 2 = 0$, ce are două rădăcini reale distincte a_1 și a_2. Așadar, numărul soluțiilor ecuației $3 - z = z ^2 - i$ este egal cu 2.	5p 2p 2p
4.	Răspuns corect: C. O matrice de ordin 2 are 4 elemente. Fiecare poate fi ales din mulțimea $\{-1, 0, 1\}$ deci $\mathcal{M}_2(\{-1, 0, 1\}) = 3^4 = 81$. O matrice de 2×2 simetrică poate fi scrisă în forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, unde $a, b, d \in \{-1, 0, 1\}$. Așadar, numărul matricelor simetrice este: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, deci probabilitatea cerută este: $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$.	5p 2p 2p
5.	Răspuns corect: B. Dreptele AB și CD sunt perpendiculare dacă $m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$. Cum $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, avem că $m_{AB} = \frac{m-3}{4}$, iar $m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = -\frac{2}{3}$. Deci dreptele AB și CD sunt perpediculare dacă $\frac{m-3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = 9$.	5p 1p 2p 1p
6.	Răspuns corect: B. Din teorema cosinusului avem că $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, unde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Deci $\cos B = \frac{81 + 16 - 121}{2 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{-1}{3}$. Folosind relația $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$, avem $\sin^2 B = \frac{8}{9}$. Cum $\sin B > 0$, obținem $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.	5p 2p 2p

1.a)	Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Prin calcul direct se observă că $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 + 2(x+y) & -(x+y) \\ 4(x+y) & 1 - 2(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y)$.	5p
1.b)	Conform punctului a), cum $x + y \in \mathbb{R}$, rezultă că G este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ față de operația de înmulțire. Asociativitatea: Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, avem $(A(x) \cdot A(y)) \cdot A(z) = A(x) \cdot (A(y) \cdot A(z))$, deoarece $(A(x) \cdot A(y)) \cdot A(z) = A(x+y) \cdot A(z) = A((x+y)+z) = A(x+(y+z)) = A(x) \cdot A(y+z) = A(x) \cdot (A(y) \cdot A(z))$. Comutativitatea: Se arată ușor că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$ (folosind punctul a) și comutativitatea operației de adunare pe $\mathbb{R}$). Existența elementului neutru: Cum $A(0) = I_2$, rezultă că $A(0)$ este element neutru. Simetrizabilitatea elementelor: Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $A(x)$ este simetrizabil dacă există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0) \Leftrightarrow A(x+x') = A(x'+x) = A(0) \Leftrightarrow x' = -x$. Deci $(G, \cdot)$ formează o structură de grup abelian.	1p 1p 1p 1p 1p
1.c)	Se poate observa că $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2(-2) & -(-2) \\ 4(-2) & 1 - 2(-2) \end{pmatrix} = A(-2)$. Deci, conform punctului a) avem $A(-2)^{2025} = A(-2) \cdot A(-2) \cdot \dots \cdot A(-2) = A(2025(-2)) = A(-4050)$.	2p 3p
2.a)	Se verifică prin calcul direct.	5p
2.b)	Cum x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f , acestea satisfac $x_1^3 + mx_1^2 + x_1 - p = 0$, $x_2^3 + mx_2^2 + x_2 - p = 0$, $x_3^3 + mx_3^2 + x_3 - p = 0$. Adunând relațiile de mai sus avem $s_3 = -m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) + 3p$. Deci $s_3 = -ms_2 - s_1 + 3p$. Cum $s_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, din relațiile lui Viète obținem $s_2 = (-m)^2 - 2 \cdot 1$, respectiv $s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -m$. Așadar, $s_3 = -m(m^2 - 2) - (-m) + 3p = -m(m^2 - 3) + 3p$.	2p 2p 1p
2.c)	$\Rightarrow$: Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Atunci $\det(A) \in \mathbb{R}$. Deci $\det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 \geq 0$. $\Leftarrow$: Știm că $\det(A^T \cdot A) = (\det(A))^2 \geq 0$; arătăm că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Se poate arăta că $\det A = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$, deci vom avea $((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3))^2 \geq 0$. Presupunem prin reducere la absurd că polinomul f nu are toate rădăcinile reale. Cum $\text{grad}(f) = 3$ și coeficienții sunt reali, putem presupune că $x_1 = a + ib$, $x_2 = a - ib$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Din relațiile lui Viète avem că $x_3 = -m - (x_1 + x_2) = -m - 2a$. Deci $((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3))^2 = (2ib(m + 3a + ib)(m + 3a - ib))^2 = -4b^2((m + 3a)^2 + b^2)^2 < 0$, contradicție deoarece $\det(A^T \cdot A) \geq 0$. Așadar f are toate rădăcinile reale.	1p 2p 2p

1.a)	Calculul $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - a$. Așadar, $f''(x) = \frac{2}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$.	2p 3p
1.b)	Tangenta la graficul unei funcții f într-un punct $(x_0, f(x_0))$ are panta egală cu derivata, $m = f'(x_0)$. Deci tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -2$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa Ox dacă și numai dacă $f'(-2) = 0$. Cum $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, avem $f'(-2) = \frac{-1}{\sqrt{4-4+3}} - a = -\frac{1}{\sqrt{3}} - a$. Deci $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.	2p 3p
1.c)	Dacă $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} - a(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3} + (x+1)} = 0$. Atunci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Dacă $a \neq 1$, avem $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 - a$ și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} - x - a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} - (x+1) + 1 - a) = 1 - a$. Astfel, funcția admite asimptotă oblică spre $+\infty$: $y = (1 - a)(x + 1)$.	2p 2p 1p
2.a)	Avem $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-1} (\sin x)' dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. Astfel obținem relația de recurență cerută.	5p
2.b)	Se demonstrează folosind punctul a) și principiul inducției matematice.	5p
2.c)	Folosind punctul a) găsim că $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a_n}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}$. Pe de altă parte, din punctul b) avem $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{a_n \cdot \sqrt{2n+1}}$. Așadar, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{a_n}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a_n \cdot \sqrt{2n+1} = a_n^2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Deci $a_n^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, se poate arăta ușor că $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător și că $I_n > 0$. Atunci $0 < I_{n+1} < I_n \Rightarrow 1 < \frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{I_n}{\frac{n}{n+1} I_{n-1}} < \frac{n+1}{n}$. Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$. Concluzionând, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.	1p 1p 1p 2p